Херсонський державний університет

Кузьмич Валерій, Кузьмич Людмила, Савченко Олександр

ОСНОВНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ПОНЯТТЯ ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ

З метричними просторами здобувачі освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю «014.04 Середня освіта (математика)» знайомляться при вивченні функцій декількох змінних у курсі математичного аналізу. Ознайомлення з геометричними аспектами теорії метричних просторів слід розпочинати з введення основних геометричних понять на основі аксіом відстані між точками метричного простору.

Відстань між двома різними точками x і y простору X є функціоналом $\rho(x,y)$, що задовольняє трьом умовам (аксіомам) відстані:

а) $\rho(x,y)>0$, б) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, в) $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$,

для будь-яких різних точок x, y, z простору. Якщо ці аксіоми виконуються, то функціонал ρ називають метрикою простору X, а сам простір – метричним, і позначають (X,ρ). У випадку коли нерівність в) перетворюється у рівність, кажуть, що точки x, y, z розміщені прямолінійно у просторі X [1, с. 527].

Кут у просторі (X,ρ) можна розглядати як упорядковану трійку точок цього простору [2, с. 383].

Означення 1. Нехай x, y, z – довільні різні точки простору (X,ρ). Упорядковану трійку (x,y,z) цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці y, і позначати: $\angle(x,y,z)$. Пари точок (x,y) і (y,z), при цьому, будемо називати сторонами кута.

Для числової характеристики кута можна використати теорему косинусів, оскільки вона містить відстані між кожною парою точок з трьох заданих [2, с. 383].

Означення 2. Нехай x, y, z – довільні різні точки простору (X,ρ). Характеристикою кута $\angle(x,y,z)$, або кутовою *характеристикою, будемо називати дійсне число* $\varphi(x,y,z)$ *, що знаходиться за формулою:*

$$\varphi(x,y,z)=\frac{\rho^2(x,y)+\rho^2(y,z)-\rho^2(x,z)}{2\rho(x,y)\rho(y,z)}.$$

За допомогою кутової характеристики достатньо просто можна ввести поняття плоского розміщення точок метричного простору [2, с. 387]. Для цього використаємо компактніші позначення відстані між точками x_i та x_j , і характеристики кута $\angle(x_i,x_j,x_k)$, поклавши: $\rho(x_i,x_j)=\rho_{ij}$, $\varphi(x_i,x_j,x_k)=\varphi_{ijk}$. При таких позначеннях плоске розміщення чотирьох точок метричного простору можна означити наступним чином [2, с. 387].

Означення 3. Будемо казати, що різні точки x_1,x_2,x_3,x_4 *простору* (X,ρ) *плоско розміщені, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки* x_1 *) виконується рівність:* $1+2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314}-\varphi_{213}^2-\varphi_{214}^2-\varphi_{314}^2=0.$

У геометрії Евкліда рівність наведена у Означенні 3 означає, що тетраедр з вершинами у точках x_1,x_2,x_3,x_4 має нульовий об’єм [3, с. 71].

Кутову характеристику можна використати і для означення прямолінійного розміщення точок x_i,x_j,x_k . При цьому буде виконуватись рівність: $\varphi_{213}^2=1.$ Ця рівність рівносильна двом: $\varphi_{213}=1$ і $\varphi_{213}=-1$. У обох випадках точки x_i,x_j,x_k будуть розміщені прямолінійно [4, с. 46-47].

Деякі класичні теореми з геометрії Евкліда можна переформулювати у термінах метричної геометрії [5, с. 89-91].

Теорема 1. Якщо для трьох різних точок x_1,x_2,x_3 *простору* (X,ρ) *виконується рівність:* $\varphi_{123}=0$ *, то справедлива рівність:*

$$\rho_{13}^2=\rho_{12}^2+\rho_{23}^2.$$

Теорема 1 є аналогом теореми Піфагора для прямокутного трикутника.

Теорема 2. Для довільних трьох різних точок x_1,x_2,x_3 *простору* (X,ρ) *виконується рівність:*

$$\rho_{13}=\rho_{12}\varphi_{213}+\rho_{23}\varphi_{132}.$$

Теорема 2 є аналогом формули проєкцій у геометрії Евкліда.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. Москва: Издательство Московского университета, 1963. 570 с.

2. Кузьмич В. І. Геометричні властивості метричних просторів. *Укр. мат. журн.* 2019. № 3(71). С. 382–399.

3. Кузьмич В. І., Кузьмич Ю. В. Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. 2012. № 36(249). С. 55–64.

4. Кузьмич В. І., Кузьмич Л. В. Побудова прямолінійно та плоско розміщених множин при вивченні метричних просторів. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. Випуск 20: збірник наукових праць*. 2018. С. 44–52.

5. Kuz'mich V. I., Savchenko A. G. Geometric relations in an arbitrary metric space. *Matematychni Studii*. 2019. vol. 52, №. 1. P. 86–95.